

التمرين الأول:

(i-1) نحل في \mathbb{R} : $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

نضع : $t = e^x$: $t^2 = e^{2x}$ ومنه :

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4(3) = 16 - 12 = 4 > 0$

حالات : $t_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$t_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$t = t_1$ أو $t = t_2$

$e^x = 1$ أو $e^x = 3$

$x = \ln(1) = 0$ أو $x = \ln(3)$

مجموعة الحلول هي :

$S = \{0; \ln(3)\}$

(ii-2) نحل في \mathbb{R} المتراجعة :

$e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$

حسب ماسويت :

$e^{2x} - 4e^x + 3 = (e^x - 1)(e^x - 3)$

ولدينا : $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(1) = 0$

$e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(3)$

الجدول :

x	0	$\ln(3)$		
$e^x - 1$	-	+	+	+
$e^x - 3$	-	-	+	+
$e^{2x} - 4e^x + 3$	+	-	+	+

اذا مجموعة الحلول هي المجال : $[0; \ln(3)]$

1- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x - 1}$ حساب

مباشرة نجد : $\frac{1-4+3}{1-1} = \frac{0}{0}$ فإ.ع.م.

لدينا : $e^{2x} - 1 = (e^x)^2 - 1^2 = (e^x - 1)(e^x + 1)$

و $t = e^x$: $e^{2x} - 4e^x + 3 = t^2 - 4t + 3$

$= (t-1)(t-3)$

$= (e^x - 1)(e^x - 3)$

ان : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^x - 3)}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 3}{e^x + 1} = \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$

(2) $e^{2x} + e^x + 4x = 0$

$x \in [-1; 0]$

الدالة $f: x \mapsto e^{2x} + e^x + 4x$

متصلة على المجال $[-1; 0]$

ولدينا : $f(0) = 1 + 1 + 0 = 2 > 0$

$f(-1) = e^{-2} + e^{-1} - 4$
 $= \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 4$

نعلم ان : $e \approx 2.7 > 1$ ومنه : $e^2 > 1$

ان : $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} < 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 4 < 2 - 4 = -2$

$f(-1) < 0$

(ملاحظة : يمكن استعمال الاشارة الكاسية)

ان : $f(-1) \times f(0) < 0$

ان حسب مبرهنة القيمة الوسطية السعارة $f(x) = 0$ تقبل حل في المجال $[-1; 0]$.

2

طريقة أخرى:

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{3-2u_n}{u_n} = \frac{3}{u_n} - \frac{2u_n}{u_n} = \frac{3}{u_n} - 2$$

$$\frac{1}{u_n} \geq 2 \quad \text{لأن} \quad 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{u_n} - 2 \geq 4 \quad \text{لأن} \quad \frac{3}{u_n} \geq 6$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{u_{n+1}} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{u_{n+1}} \geq 2$$

$$(4 \geq 2)$$

$$0 < u_{n+1} \quad \text{و} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

ملاحظة: ينبغي أن نبرهن على أن:

$$0 < u_{n+1} \quad \text{و} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

لا ينبغي نسيان إحدى المتفاوتتين.

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$$

طريقة رقم 1:

نستعمل البرهان بالتكافؤ:

ليكن $n \in \mathbb{N}$.

العلاقة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{3-2u_n} \leq \frac{u_n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2} \quad (u_n > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 3-2u_n \quad \left(\begin{array}{l} 3-2u_n > 0 \\ u_n \leq \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -2u_n$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 2u_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq u_n$$

وهذا صحيح لأن: $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ وبالتالي العبارة صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$.

التمرين الثاني:

$$u_0 = \frac{1}{2}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$$

$$u_1 = \frac{u_0}{3-2u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

(2) من أجل $n=0$ لدينا:

$$0 < u_0 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

ولهذا صحيح.

ليكن $n \geq 0$

$$0 < u_n \leq \frac{1}{2} \quad \text{نفترض أن:}$$

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{ونبي أن:}$$

$$u_n \leq \frac{1}{2} \quad \text{فإن} \quad 2u_n \leq 1$$

$$-2u_n \geq -1$$

$$\Rightarrow 3-2u_n \geq 3-1=2$$

إذن:

$$\left(3-2u_n > 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{3-2u_n} \quad \text{و} \quad \frac{u_n}{3-2u_n} \leq \frac{u_n}{2}$$

$$(u_n > 0)$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{u_n}{3-2u_n} \quad \text{و} \quad \frac{u_n}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{u_n}{2} = \frac{1}{2} \times u_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \right)$$

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$ وحسب مبدأ التراجع:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$$

طريقة 2: ليكن $n \in \mathbb{N}$ ردياً : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$

3 $\frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \dots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}$ n من العوامل

اذن : $\frac{u_n}{u_0} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(لأن : $u_0 = \frac{1}{2}$)

وبالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

طريقة 2 :

البيان : $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ صحيح من أجل $n=0$: لأن

$0 < u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ وهذا صحيح.

ليكن $n \in \mathbb{N}$:

نفترض ان : $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

نعم ان :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

اذن :

$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

$\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (حسب فرض التراجع)

$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

اذن بحسب مبدأ التراجع :

$(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

حسب $\lim u_n$:

نعم ان : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبما ان : $1 \geq \frac{1}{2} \geq -1$ فان : $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

اذن : $\lim u_n = 0$

$= \frac{1}{u_n} \left(\frac{u_n}{3 - 2u_n} \right) - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{3 - 2u_n} - \frac{1}{2} = \frac{-1 + 2u_n}{2(3 - 2u_n)}$

نعم ان : $u_n \leq \frac{1}{2}$ اذن : $\begin{cases} 3 - 2u_n \geq 0 \\ -1 + 2u_n \leq 0 \end{cases}$

ومنه : $\frac{-1 + 2u_n}{2(3 - 2u_n)} \leq 0$

وبالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

3-ب) استنتاج الرتبة : ليكن $n \in \mathbb{N}$

نعم بما سبق ان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

اذن : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ (لأن : $\frac{1}{2} \leq 1$)

وبالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \leq u_n$ ومنه (u_n) تناقصية .

4-ا) نبين ان : $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

طريقة 1 :

باستخدام السؤال 3-ا) :

نعم ان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ لكل عدد صحيح n .

اذن الباري صحيح بالخصوص من أجل :

$0, 1, 2, \dots, n$ أي أن :

عدد الأعداد : $\left. \begin{array}{l} \frac{u_1}{u_0} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{u_2}{u_1} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{u_3}{u_2} \leq \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\}$ ضرب هذه المتفاوتات طرفاً بطرف فنحصل على الجداء :

4

المسألة الثالثة

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 3 - 4 = -1 < 0$$

حالتان عقديتان مترافقتان

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

مجموعة الحلول هي: $S = \{z_1, z_2\}$

$$b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = e^{i\frac{\pi}{6}} \quad (2)$$

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad (1-2)$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \quad (3)$$

ب- التحقق:

$$\begin{aligned} \bar{a}b &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3} \bar{a}a = \sqrt{3}|a|^2 = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$$

$$(|a| = |e^{i\frac{\pi}{6}}| = 1) \quad (4)$$

ملاحظة: يمكن الحساب بطريقة النشر المعتاد ونجد $\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{3}a \\ \bar{a}b &= \bar{a}\sqrt{3}a = \sqrt{3}\bar{a}a = \sqrt{3} \end{aligned}$$

(3) تحديد k نسبة التحوّل h.

نقول صحة التحوّل h هي:

$$z' - z_0 = k(z - z_0)$$

بما أن: $h(A) = B$ فإن:

$$z_B = k z_A$$

$$b = ka \quad (5)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ln(3 - 2u_n) \quad (4-4)$$

نعلم أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ إذن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 2u_n = 3 - 0 = 3$$

وبما أن: \ln دالة متصلة فإن:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(3 - 2u_n) \\ &= \ln(3) \end{aligned}$$

(4-5) الدالة

لدينا N عدد طبيعي

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}} - 1 &= \frac{3 - 2u_n}{u_n} - 1 = \frac{3 - 2u_n - u_n}{u_n} \\ &= \frac{3 - 3u_n}{u_n} = 3 \left(\frac{1 - u_n}{u_n} \right) = 3 \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right) \end{aligned}$$

(5-6) استنتاج u_n بدلالة n :

$$w_n = \frac{1}{u_n} - 1$$

حسب (5-6) لدينا:

$$w_{n+1} = 3 w_n$$

إذن: (w_n) تسلسل أساسي 3 و $w_0 = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = 3^n w_0 = 3^n \left(\frac{1}{u_0} - 1 \right)$$

$$w_n = 3^n (1 - 1) = 3^n$$

$$\frac{1}{u_n} - 1 = 3^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = 1 + 3^n \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 + 3^n}$$

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = \frac{1}{1 + 3^n}$

5

$$DI = |1 - (a+1)| = |-a| = |a| = 1 \text{ و}$$

اذن فهو معين

(i-5) التحقق :

(دنيا)

$$d-b = 1+a-b$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}-3}{2} + i\frac{(1-\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$$

استنتاج : $\arg(d-b)$

حسب ما سبق لدينا :

$$\arg(d-b) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)\right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \arg(1-i) [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 0 [2\pi] \text{ : بما أن } \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$$

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ ولدينا}$$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ : (ب)}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = [\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}]$$

$$\arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ : (ج)}$$

وبالتالي :

$$\boxed{\arg(d-b) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]}$$

5-ب) الشكل المثلثي للعدد : $1-b$

$$1-b = 1 - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= (-1) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= [1; \pi] \times \left[\frac{1}{2}; \frac{\pi}{3}\right] = [1 \times \frac{1}{2}; \pi + \frac{\pi}{3}]$$

$$1-b = [1; \frac{4\pi}{3}] \text{ : (د)}$$

$$b\bar{a} = k\bar{a}$$

وهو :

$$a\bar{a} = |a|^2 = 1 \text{ و } b\bar{a} = \sqrt{3} \text{ ونعلم أن :}$$

$$\boxed{k=\sqrt{3}} \text{ : (ب) } \sqrt{3} = k \times 1 \text{ و}$$

بما أن $k \in \mathbb{R}$ فإنه يوجد حاد

h مركزه و يوصل A الى B ونسبة $\sqrt{3}$

(i-4) دوران مركزه A ونزوي $\frac{\pi}{2}$

$$z' - z_A = e^{i\pi/2}(z - z_A) \text{ : (أ)}$$

$$\boxed{z' = a + e^{i\pi/2}(z - a)} \text{ : (د)}$$

(ب-4) D هي صورة C بالدوران R

$$d = a + e^{i\pi/2}(\bar{a} - a) \text{ : (أ)}$$

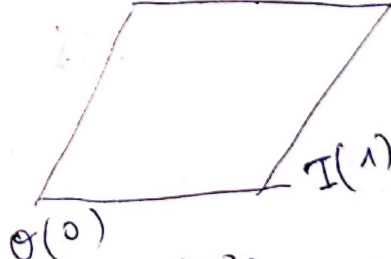
$$= a + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= a + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$= a + i(-i) = a + 1$$

$$\boxed{d = a + 1} \text{ : (ب)}$$

(ج-4) A(a) D(a+1)



$$\text{aff}(\overrightarrow{AD}) = a+1 - a = [1] \text{ : (أ)}$$

$$\text{aff}(\overrightarrow{OI}) = 1 - 0 = [1]$$

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OI}} \text{ : (ب)}$$

وبالتالي ADIO متوازي أضلاع

وله ضلعان متساويان متقابلان هما

[AP] و [PI] : لأن

$$AD = |d-a| = |a+1-a| = 1$$

6

$$\frac{f(n)}{n} = 2 \ln(n) - 2 \quad (3-2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = +\infty \quad (3-1)$$

تأويل هندسي :

(ع) يميل غرافا لتدحجيا في اتجاه محور الأرتيب .

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{f(n)}{n} \quad (3-1) \text{ حساب}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow 0^+} 2 \ln(n) - 2$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \ln(n) = -\infty \quad (3-2)$$

تأويل هندسي :

$$\frac{f(n) - f(0)}{n - 0} = \frac{f(n)}{n} \quad (3-1)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(n) - f(0)}{n - 0} = -\infty$$

ومن (ع) يميل نصف سداس موجب نحو الأسفل ↓ في النقط ذات الفصول $x_0 = 0$ (أصل الكعب).

$$]0, +\infty[\quad f \text{ متصلة على}$$

$$(\forall x > 0): f'(n) = (2 \ln(n) - 2n)'$$

$$= (2n)' \ln(n) + 2n \ln'(n) - (2n)'$$

$$= 2 \ln(n) + 2n \times \frac{1}{n} - 2$$

$$= 2 \ln(n)$$

$$(\forall x > 0): f'(n) = 2 \ln(x)$$

$$(3-3) \text{ جدول تغيرات } f :$$

$$(3-5) \text{ استنتاج قياسات } (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD})$$

$$(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right)$$

$$(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BP}) \equiv \arg(d-b) - \arg(1-b) [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} - \left(\frac{4\pi}{3}\right) [2\pi]$$

$$\text{لأن } \arg(1-b) \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi] \text{ سؤال (3-5)}$$

$$\arg(d-b) \equiv -\frac{\pi}{4} \quad (3-5)$$

$$(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}) \equiv -\frac{19\pi}{12} [2\pi]$$

ملاحظة: لدينا:

$$-\frac{19\pi}{12} + 2\pi = \frac{5\pi}{12}$$

لذا:

$$(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

هذا يعني إجابة صحيحة.

المسألة 2:

$$\begin{cases} f(n) = 2n \ln(n) - 2n ; n > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ اهل } f \text{ في } 0 \text{ على المينى}$$

$$f(0) = 0$$

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow 0^+} 2n \ln(n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = 0 - 2 \times 0 = 0 = f(0)$$

$$\text{ومن } f \text{ متصلة في } 0 \text{ على المينى}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) \quad (3-2) \text{ حساب}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \ln(n) - 2)$$

$$= +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

(لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$)

7. $x = e$ (p1) : $x = e$ هو الحل

$x = e$ (p2) : $f(x) = 0$ $f(x) = x$ $x = e^{3/2}$

$$f(e^{3/2}) = e^{3/2}$$

$$e^{3/2} \approx 4.5$$

$f'(1) = 0$ (p3) : $f'(1) = 0$ $f(1) = -2$

$A(1, -2)$: $f(1) = -2$

$$\int_1^e x \ln(x) dx$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int_1^e x \ln(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{e^2 \ln(e)}{2} - \frac{1}{2} \ln(1) - \int_1^e \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2e^2 - e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{1+e^2}{4}}$$

$$\int_1^e f(x) dx$$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (2 \ln(x) - 2x) dx$$

$$= 2 \int_1^e \ln(x) dx - \int_1^e 2x dx$$

$$= 2 \left(\frac{1+e^2}{4} \right) - [x^2]_1^e$$

$$= \frac{1+e^2}{2} - (e^2 - 1) = \frac{1+e^2}{2} - \frac{2e^2 - 2}{2} = \frac{3-e^2}{2}$$

$$f'(x) = 2 \ln(x)$$

$$\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

x	0	1	+
f'(x)	-	0	+
f	0	-2	+

$x \in]0, +\infty[$: $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln(x) = 2x$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$f(x) = 0$: $x = e$

$$\boxed{x = e}$$

$f(x) = x$: $x = e$

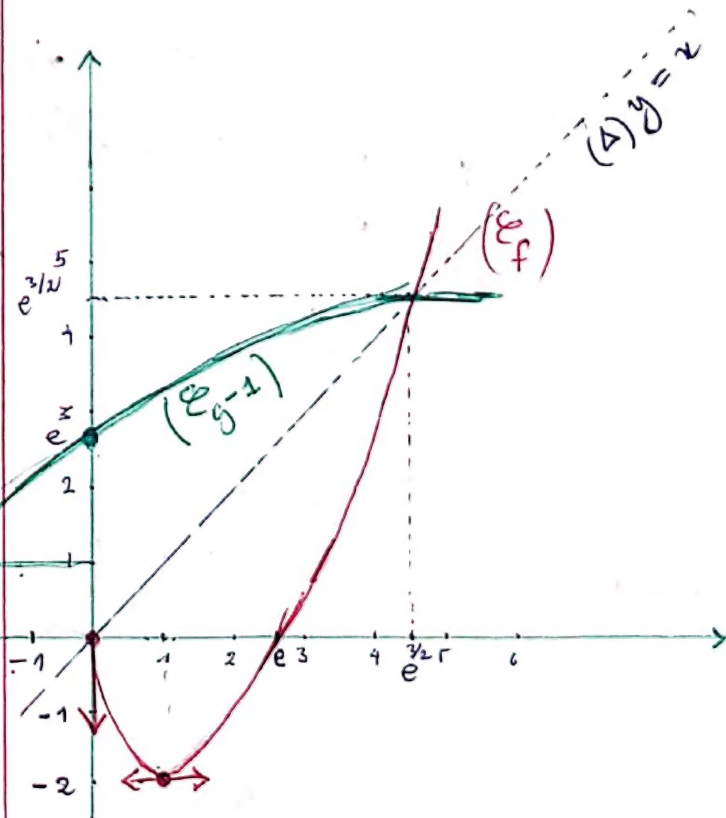
$$f(x) = x \Leftrightarrow 2 \ln(x) - 2x = x$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln(x) = 3x \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{x = e^{3/2}}$$

الحل هو :

(ب) : $f(x) = 0$



$$8 \quad \begin{cases} h(x) = x^3 + 3x, & x \leq 0 \\ h(x) = 2x \ln(x) - 2x, & x > 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + 3x = 0 = h(0)$$

إذن: h متصلة في 0 على اليسار

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x) - 2x = 0 = h(0)$$

إذن: h متصلة على اليمين في 0

بيان: h متصلة على اليمين وعلى اليسار في 0

إذن: h متصلة في 0

8- ب) قابلية الاستداف في 0 على اليسار

$$\forall x \leq 0: h(x) = x^3 + 3x$$

$$x \mapsto x^3 + 3x \text{ دالة حدودية.}$$

إذن: فهي قداف على \mathbb{R}

وبالخصوص في 0 على اليسار

ومنه: h ق.ت. في 0 على اليسار

$$h'(x) = 3x^2 + 3$$

$$h'(0) = 3$$

التأويل الهندسي: (\mathcal{C}_h) يتقبل نصف مماس في النقطة ذات الأضلاع $x_0 = 0$ صفادله:

$$\begin{cases} y = h'(0)(x-0) + h(0) \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \text{أي أن:}$$

8- ج) h غير ق.ت. في 0

$$\forall x > 0: h(x) = f(x)$$

f غير ق.ت. في 0 (حسب سؤال 3-ع)

على اليمين: إذن: h كذلك.

ومنه: h غير ق.ت. في 0.

* * *

6- ب) حسب جدول تغيرات f
(القيمة الدنيا لـ f على $]0, +\infty[$ هي)

$$f(1) = -2$$

6- ج) الاستداف:

بيان: -2 قيمة دنيا لـ f على $]0, +\infty[$
فإن لكل $x \in]0, +\infty[$ لدينا:

$$f(x) \geq -2 \Rightarrow 2x \ln(x) - 2x \geq -2$$

$$\Rightarrow 2x \ln(x) \geq 2x - 2$$

$$\Rightarrow \ln(x) \geq \frac{2x-2}{2x} \quad (x > 0)$$

$$\Rightarrow \ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$$

$$\text{إذن: } (\forall x \in]0, +\infty[) \quad \ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$$

7) لكي نقتصر f على $[1, +\infty[$.

7- ب) متصلة على $[1, +\infty[$.

و تزايدية قطعا على $[1, +\infty[$.

إذن: نقبل دالة عكسية g^{-1} .

g^{-1} معرفة على المجال:

$$J = g([1, +\infty[) = f([1, +\infty[)$$

$$= [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$= [-2; +\infty[$$

7- ج) إنشاء منحنى g^{-1} .

ننظر الشكل السابق:

(ع) و $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنفذ

الأول للمعلم: $y = x$ (A)

$$\text{ملاحظة: } (1, -2) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow (-2, 1) \in (\mathcal{C}_{g^{-1}})$$

$$(e, 0) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow (0, e) \in (\mathcal{C}_{g^{-1}})$$

$$\mathcal{D}_{g^{-1}} = [-2; +\infty[$$